

DOI: 10.17122/ntj-oil-2019-3-47-54  
УДК 532+622.276.1/4(73)

**С.С. Мирошниченко** (Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашникова, г. Ижевск, Российская Федерация),  
**К.А. Сидельников** (ЗАО «Ижевский нефтяной научный центр», г. Ижевск, Российская Федерация), **А.Н. Краснов** (Уфимский государственный нефтяной технический университет, г. Уфа, Российская Федерация)

## РЕШЕНИЕ КВАЗИТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ В ПЛАСТАХ СО СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

**Sergey S. Miroshnichenko** (Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation), **Konstantin A. Sidelnikov** (Izhevsk Petroleum Research Center JSC, Izhevsk, Russian Federation),  
**Andrey N. Krasnov** (Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russian Federation)

## SOLUTION OF QUASI-THREE-DIMENSIONAL TASKS OF FILTRATION IN COMPLEX GEOMETRY RESERVOIRS

### Введение

С целью повышения качества процесса добычи нефти из нефтяного пласта предлагается подход к построению разностной ортогональной криволинейной сетки, позволяющий рассчитывать процессы фильтрации в пластах со сложной геометрией.

### Цели и задачи

Рассмотреть метод решения уравнений фильтрации в криволинейных системах координат путем применения алгоритма построения ортогональных разностных сеток на криволинейных поверхностях, позволяющего экономично решать нестационарные квазитрехмерные задачи фильтрации с возможностью применения этих решателей в оптимизационных задачах. Физика представленного к рассмотрению вопроса имеет основательные последствия и характеризует важные требования к составлению математических уравнений.

### Background

In order to improve the quality of oil recovery from oil reservoir, an approach to the construction of a differential orthogonal curvilinear grid is proposed, allowing to calculate filtration processes in reservoirs with a complex geometry.

### Aims and Objectives

To present a method for solving filtering equations in curvilinear coordinate systems by applying an algorithm for constructing orthogonal difference grids on curvilinear surfaces, which makes it possible to economically solve unsteady quasi-three-dimensional filtering problems with the possibility of using these solvers in optimization problems. The physics of a question presented for consideration has fundamental consequences and characterizes important requirements for the compilation of mathematical equations.

Этот факт принимается ко вниманию в данной статье и применяется при определении ответов на некоторые математические проблемы.

В случае сложной формы границ исследуемой области желательна применение расчетных сеток, приспособленных к условиям течения. Применение прямоугольных сеток при аппроксимации границ приводит к значительному усложнению расчетных алгоритмов для реализации граничных условий.

#### Результаты

Разработан способ построения разностной ортогональной криволинейной сетки, который позволяет вычислять процессы фильтрации в пластах со сложной геометрией. Позволяет решать задачи в квазитрехмерной постановке, с учетом мощности пласта при относительно небольшой его толщине. Актуальность работы проявляется в том, что предложенный метод позволяет повысить качество добычи фракций нефти из пластов с довольно сложной геометрией.

This fact is taken into account in this article and is used in determining the answers to some mathematical problems.

In the case of a complex shape of the borders of the study area, it is desirable to use design grids adapted to flow conditions. The use of rectangular grids in the approximation of boundaries leads to a significant complication of computational algorithms for the implementation of boundary conditions.

#### Results

A method for constructing a differential orthogonal curvilinear grid has been developed, which allows one to calculate filtration processes in reservoirs with a complex geometry. It allows to solve problems in a quasi-three-dimensional formulation, taking into account the thickness of the reservoir with a relatively small thickness. The relevance of the work is manifested in the fact that the proposed method allows to improve the quality of production of oil fractions from reservoirs with a rather complex geometry.

---

---

**Ключевые слова:** двухфазная фильтрация; криволинейные координаты; ортогональная сетка; нефтяной пласт

**Key words:** two-phase filtration; curvilinear coordinates; orthogonal grid; oil reservoir

---

---

Для построения сетки на криволинейной поверхности рассмотрим геометрию регулярного куска поверхности  $S$ , определяемого уравнениями в трехмерном евклидовом пространстве:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (1)$$

где  $u, v$  - некоторые произвольные координаты. Ортогональная сетка на поверхности задается уравнениями

$$\xi = \xi(u, v) = \text{const}, \quad \eta = \eta(u, v) = \text{const}.$$

Для ортогональных линий на поверхности справедливо соотношение

To build a grid on a curvilinear surface, we consider the geometry of a regular piece of a surface  $S$  defined by equations in a three-dimensional Euclidean space:

where  $u, v$  are some arbitrary coordinates. The orthogonal grid on the surface is given by the equations

For orthogonal lines on the surface, the ratio

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} = \frac{\partial \xi}{\partial \tau}, \quad (2)$$

где  $n, \tau$  - нормаль и касательная к линии.

Функции  $\xi(u, v), \eta(u, v)$  должны удовлетворять системе уравнений]

$$\frac{G\eta_v - F\eta_u}{W} = \xi_u, \quad -\frac{E\eta_u - F\eta_v}{W} = \xi_v, \quad (3)$$

являющейся обобщением условий Коши-Римана.

Для решения системы (3) продифференцируем первое уравнение по  $v$ , второе по  $u$  и сложим. В результате получим второй дифференциальный оператор Бельтрами

$$\nabla^2 \eta \equiv \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{G\eta_v - F\eta_u}{W} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{E\eta_u - F\eta_v}{W} \right) = 0, \quad (4)$$

где

$$E(u, v) = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2, \quad G(u, v) = \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2.$$

$$F(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} -$$

коэффициенты основной квадратичной формы поверхности.

Алгоритм построения ортогональной сетки состоит из последовательного решения уравнения (4) и уравнения  $\nabla^2 \xi = 0$  при соответствующих граничных условиях. Для переменной  $\eta$  на одной границе задавалось значение  $\eta = 0$ , на противоположной  $\eta = 1$ ,

на остальных границах  $\frac{\partial \eta}{\partial n} = 0$ , где  $n$  - нормаль к границе.

Из уравнения (2) определяются граничные условия для переменной  $\xi$  и решается уравнение  $\nabla^2 \xi = 0$ .

Уравнения (1) и

is certain, where  $n, \tau$  are the normal and tangent to the line.

Functions  $\xi(u, v), \eta(u, v)$  must satisfy the system of equations

which is a generalization of the Cauchy-Riemann conditions.

To solve the system (3) let's differentiate the first equation in  $v$ , the second in  $u$  and sum up. As a result, we obtain the second differential operator Beltrami

where

coefficients of the main quadratic surface shape.

The algorithm for constructing an orthogonal grid consists of a sequential solution of equation (4) and an equation  $\nabla^2 \xi = 0$  with appropriate boundary conditions. For a variable  $\eta$  on one border, the value  $\eta = 0$  was set, on the opposite  $\eta = 1$ , on the other boundaries

$\frac{\partial \eta}{\partial n} = 0$ , where  $n$  is the normal to the border.

From equation (2), the boundary conditions for the variable  $\xi$  are determined and the equation  $\nabla^2 \xi = 0$  is solved.

Equations (1) and

$$\xi = \xi(u, v) = const, \quad \eta = \eta(u, v) = const$$

определяют положение узлов криволинейной сетки на поверхности.

Уравнение (4) аппроксимировалось системой разностных уравнений на девяти-точечном шаблоне. Система разностных уравнений решалась итерационным методом сопряженных градиентов с регуляризацией [1].

В области, представленной на рисунке 1, рассматривается совместное движение двух фаз: смачивающая и несмачивающая жидкости. В этом случае имеются четыре неизвестных переменных и, соответственно, четыре уравнения: два дифференциальных и два алгебраических [2].

$$\nabla \left( h(\mathbf{r}) \lambda_f(\mathbf{r}) (\nabla P_f - \gamma_f \nabla Z(\mathbf{r})) \right) = h(\mathbf{r}) \frac{\partial (\varphi S_f / B_f)}{\partial t} - h(\mathbf{r}) Q_f(t, \mathbf{r}) \quad (5)$$

$$P_o - P_w = P_c, \quad S_w + S_o = 1,$$

где  $f = \{w, o\}$  - индексы для смачивающей и несмачивающей фаз;  $S_f$  - насыщенность порового объема  $f$  фазой;  $P_c$  - капиллярное давление.

Считается, что между  $S_f$  и  $P_c$  имеется функциональная зависимость,

$$\lambda_f(\mathbf{r}) = \mathbf{k}_f(\mathbf{r}) / \mu_f, \quad \gamma_f = \rho_f g, \quad \mathbf{r} \in \Omega \subset \bar{\Omega}^3;$$

$P_f(\mathbf{r})$  - давление в точке  $\mathbf{r} \in \Omega$ ;  $\bar{\Omega}$  - область фильтрации с границей  $\Gamma$ ;  $\mathbf{n}$  - вектор внешней нормали;  $\mathbf{k}_f$  - диагональный тензор абсолютной проницаемости;  $h$  - мощность пласта;  $Z$  - глубина залегания;  $\mu_f$  - вязкость жидкости;  $\rho_f$  - плотность жидкости;  $g$  - ускорение свободного падения;  $Q_f$  - мощность источников;  $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi^o(\mathbf{r})(1 + c_\varphi(P - P^o))$ ;  $\varphi(\mathbf{r})$  - пористость;  $B_f$  - объемный коэффициент;  $P^o$  - характерное давление.

В криволинейных ортогональных координатах  $(\xi, \eta)$  оператор дивергенции градиента имеет следующий вид:

$$\xi = \xi(u, v) = const, \quad \eta = \eta(u, v) = const$$

determine the position of the nodes of a curved grid on the surface.

Equation (4) was approximated by a system of difference equations on a nine-point template. The system of difference equations was solved by an iterative method of conjugate gradients with regularization [1].

In the area shown in Figure 1, the joint motion of two phases is considered: wetting and non-wetting liquids. In this case, there are four unknown variables and, accordingly, four equations: two differential and two algebraic [2].

where  $f = \{w, o\}$  are the indices for the wetting and non-wetting phases;  $S_f$  - saturation of the pore volume  $f$  phase;  $P_c$  - capillary pressure.

It is considered that between  $S_f$  and  $P_c$  there is a functional relationship

$$\lambda_f(\mathbf{r}) = \mathbf{k}_f(\mathbf{r}) / \mu_f, \quad \gamma_f = \rho_f g, \quad \mathbf{r} \in \Omega \subset \bar{\Omega}^3;$$

$P_f(\mathbf{r})$  - pressure at a point  $\mathbf{r} \in \Omega$ ;  $\bar{\Omega}$  - filtration area with boundary  $\Gamma$ ;  $\mathbf{n}$  - vector of external normal;  $\mathbf{k}_f$  - diagonal absolute tensor;  $h$  - reservoir thickness;  $Z$  - depth of occurrence;  $\mu_f$  - fluid viscosity;  $\rho_f$  - density of the liquid;  $g$  - acceleration of gravity;  $Q_f$  - power sources;  $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi^o(\mathbf{r})(1 + c_\varphi(P - P^o))$ ;  $\varphi(\mathbf{r})$  - porosity;  $B_f$  - volume coefficient;  $P^o$  - characteristic pressure.

In curvilinear orthogonal coordinates  $(\xi, \eta)$ , the gradient divergence operator has the following form:

$$\nabla \cdot \lambda \nabla P = \frac{1}{w} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{g \lambda P_{\xi}}{w} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{e \lambda P_{\eta}}{w} \right) \right],$$

где

where

$$e = \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2, \quad g = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2, \quad w = \sqrt{eg}.$$

При разностной аппроксимации уравнения двумерной фильтрации разностный шаблон остается пятиточечным, как и в декартовых координатах. Отличие в разностных коэффициентах заключается в учете множителей  $\frac{1}{w}, \frac{e}{w}, \frac{g}{w}$ . Разностные граничные условия сохраняют свой вид. Поэтому весь численный алгоритм, реализованной в декартовых координатах, полностью сохраняется [3-5].

На последующих рисунках представлены результаты расчетов для пласта, имеющего криволинейную форму, как на рисунке 1.

With a difference approximation of the two-dimensional filtering equation, the difference pattern remains five-point, as in the Cartesian coordinates. The difference in the difference coefficients is in the consideration of factors  $\frac{1}{w}, \frac{e}{w}, \frac{g}{w}$ . Difference boundary conditions retain their appearance. Therefore, the entire numerical algorithm, implemented in Cartesian coordinates, is fully preserved [3-5].

The following figures show the results of calculations for a reservoir having a curved shape, as in Figure 1.

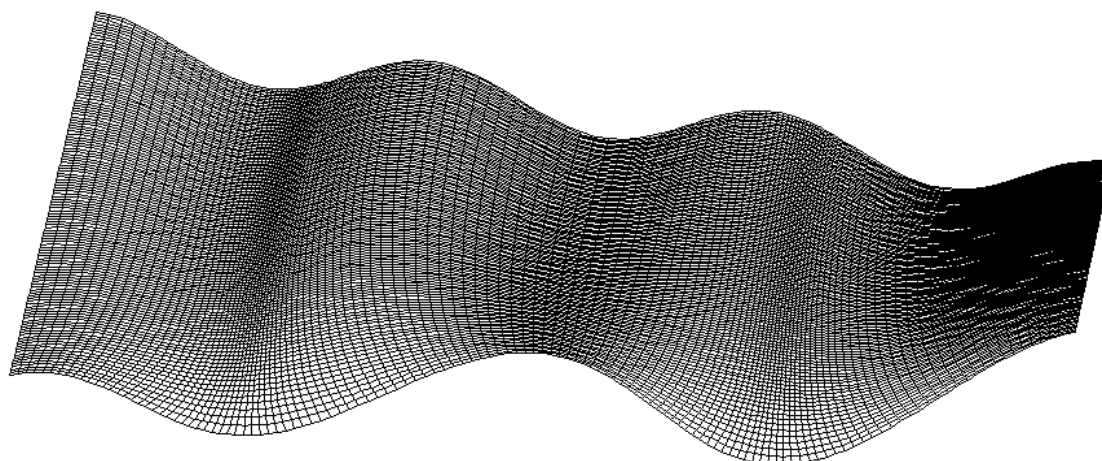


Рисунок 1. Разностная сетка на криволинейной поверхности

Figure 1. Difference grid on a curved surface



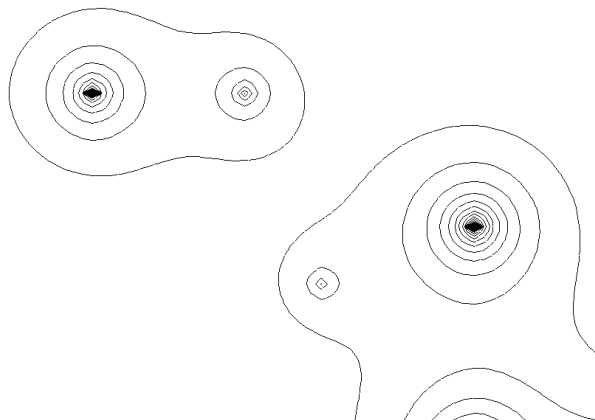


Рисунок 2. Изолинии  $S = const$

Figure 2. Isolines  $S = const$

Решается задача двухфазной фильтрации. При  $t=3.2$  показаны изолинии  $S = const$  (рисунок 2), движение воды (рисунок 3) и нефти (рисунок 4).

Solves the problem of two-phase filtration. When  $t=3.2$  the contour lines  $S = const$  are shown (Figure 2), the movement of water (Figure 3) and oil (Figure 4).

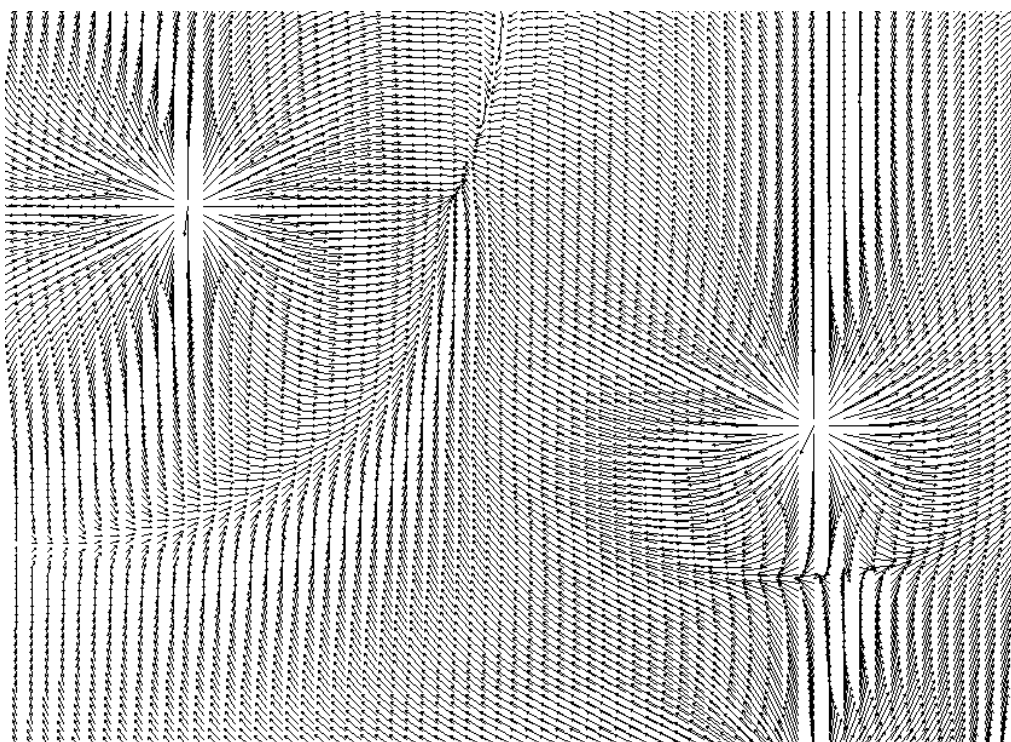


Рисунок 3. Течение воды

Figure 3. Water flow

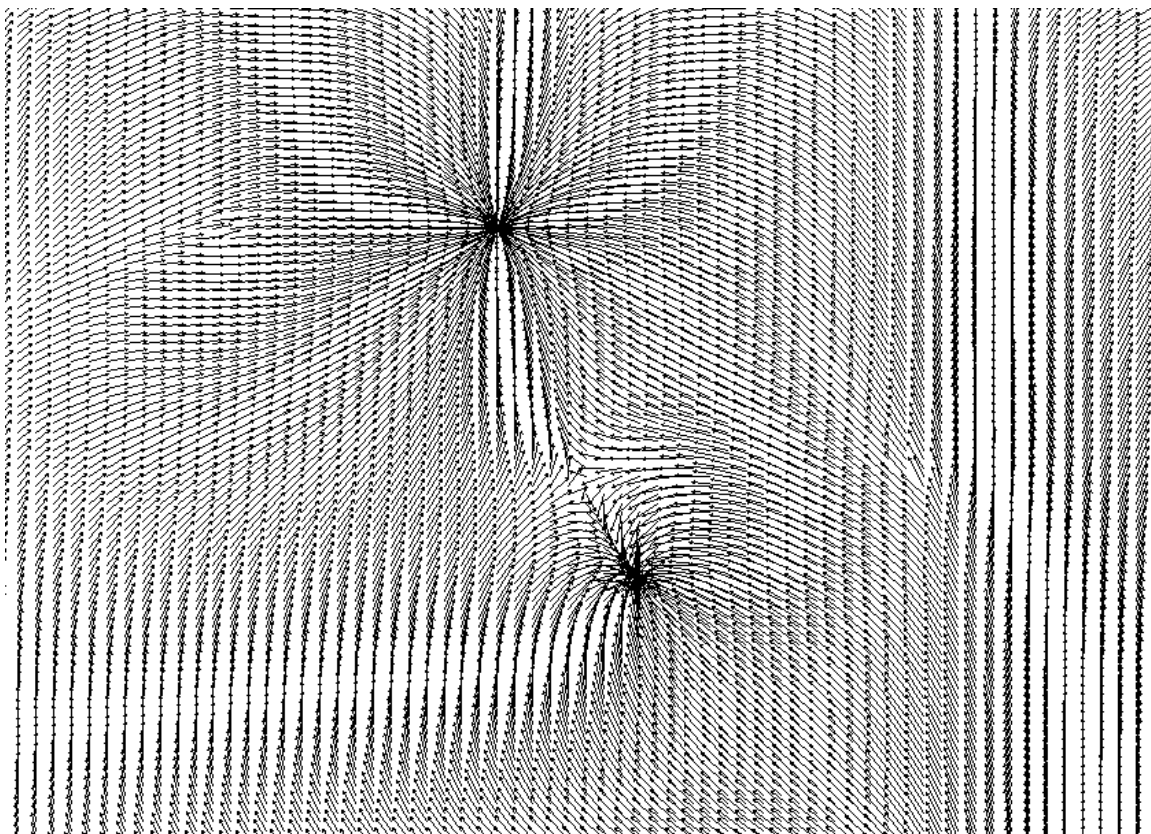


Рисунок 4. Течение нефти

Figure 4. Oil flow

#### Выводы

Разработанный подход к построению разностной ортогональной криволинейной сетки позволяет рассчитывать процессы фильтрации в пластах со сложной геометрией, тем самым решить задачу повышения качества процесса добычи нефти из нефтяного пласта. Учет мощности пласта при относительно небольшой его толщине позволяет решать задачи в квазитрехмерной постановке.

#### Conclusion

The developed approach to the construction of a differential orthogonal curvilinear grid allows to calculate the filtration processes in reservoirs with a complex geometry, thereby solving the problem of improving the quality of oil production from an oil reservoir. Accounting for the thickness of the reservoir with a relatively small thickness allows to solve problems in a quasi-three-dimensional formulation.

#### Список литературы

1. Харин А.Ю., Харина С.Б. Гидродинамические методы исследования нефтяных скважин. Уфа: Изд-во УГНТУ, 2004. 108 с.
2. Economides M.J., Nolte K.G. Reservoir Stimulation. Wiley, USA, 2000. 856 p.
3. Schiozer D.J. Simultaneous Simulation of Reservoir and Surface Facilities: Ph. D. Thesis, Stanford University, 1994.

#### References

1. Kharin A.Yu., Kharina S.B. *Gidrodinamicheskie metody issledovaniya neftnykh skvazhin* [Hydrodynamic Methods for the Study of Oil Wells]. Ufa, USPTU Publ., 2004. 108 p. [in Russian].
2. Economides M.J., Nolte K.G. *Reservoir Stimulation*. Wiley, USA, 2000, 856 p.
3. Schiozer D.J. *Simultaneous Simulation of Reservoir and Surface Facilities*: Ph. D. Thesis, Stanford University, 1994.

4. Данилов М.В. Оценка степени влияния некорректных данных при моделировании расположения скважин // Тр. Междунар. симпозиума «Надежность и качество». 2017. Т. 1. С. 176-180.

5. Данилов М.В. Оценка коэффициента пористости продуктивных коллекторов // Тр. Междунар. симпозиума «Надежность и качество». 2017. Т. 2. С. 194-198.

4. Danilov M.V. Otsenka stepeni vliyaniya nekorrektnykh dannykh pri modelirovanii raspolozheniya skvazhin [Estimation of the Degree of Influence of Incorrect Data when Modeling the Location of Wells]. *Trudy mezhdunarodnogo simpoziuma «Nadezhnost' i kachestvo»* [Proceedings of the International Symposium Reliability and Quality]. 2017, Vol. 1, pp. 176-180. [in Russian].

5. Danilov M.V. Otsenka koeffitsienta poristosti produktivnykh kollektorov [Estimation of the Porosity Ratio of Productive Reservoirs]. *Trudy mezhdunarodnogo simpoziuma «Nadezhnost' i kachestvo»* [Proceedings of the International Symposium Reliability and Quality]. 2017, Vol. 2, pp. 194-198. [in Russian].

#### Авторы

• Мирошниченко Сергей Сергеевич  
Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашникова  
Аспирант кафедры дистанционного обучения  
Российская Федерация, 426069, г. Ижевск,  
ул. Студенческая, 7  
e-mail: lurokpro@gmail.com

• Сидельников Константин Анатольевич  
ЗАО «Ижевский нефтяной научный центр»  
Главный специалист отдела контроля энергетического состояния пластов  
Российская Федерация, 426008, г. Ижевск,  
ул. Свободы, 175  
e-mail: KASidelnikov@udmurtneft.ru

• Краснов Андрей Николаевич, канд. техн. наук  
Уфимский государственный нефтяной технический университет  
Доцент кафедры автоматизации технологических процессов и производств  
Российская Федерация, 450062, г. Уфа,  
ул. Космонавтов, 1  
e-mail: ufa-znanie@mail.ru

#### The Authors

• Miroshnichenko Sergey S.  
Kalashnikov Izhevsk State Technical University  
Post-graduate Student of Distance Learning  
Department  
7, Studencheskaya str., Izhevsk, 426069,  
Russian Federation  
e-mail: lurokpro@gmail.com

• Sidelnikov Konstantin A.  
Izhevsk Petroleum Research Center JSC  
Chief Specialist of Reservoirs Energy State  
Department  
175, Svobody str., 426008, Izhevsk,  
Russian Federation  
e-mail: KASidelnikov@udmurtneft.ru

• Krasnov Andrey N., Candidate of Engineering Sciences  
Ufa State Petroleum Technological University  
Associate Professor of Automation of Technological Processes and Industrial Facilities Department  
1, Kosmonavtov str., Ufa, 450062,  
Russian Federation  
e-mail: ufa-znanie@mail.ru