УДК 532.542 DOI: 10.17122/ntj-oil-2020-6-87-94

И.Ф. Чупров, М.С. Пармузина (Ухтинский государственный технический университет, г. Ухта, Российская Федерация)

ДИНАМИКА ПОЛЯ ДАВЛЕНИЯ ПРИ ИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ

Ilia F. Chuprov, Maria S. Parmuzina (Ukhta State Technical University, Ukhta, Russian Federation)

DYNAMICS OF THE PRESSURE FIELD DURING ISOTHERMAL FLUID MOVEMENT IN PIPES

Введение

Классическая работа Н.Е. Жуковского о гидравлическом ударе в водопроводных трубах послужила началом большого числа исследований по напорному неустановившемуся движению жидкости. Большой размах строительства сети магистральных нефтегазопроводов высокого давления послужил толчком для решения задач о неустановившемся движении. В этих задачах приходится учитывать вязкость и сжимаемость жидкости, а также гидравлическое сопротивление.

Цели и задачи

В настоящей работе, преследующей главным образом практические цели, рассмотрена задача определения поля давления жидкости в круглых трубах при линеаризированном законе трения.

Результаты

Показано как систему уравнений можно трансформировать в одно уравнение гиперболического типа относительно давления, массовой скорости или скорости для капельной жидкости. При этом полученное уравнение представляет собой частный случай хорошо известного телеграфного уравнения. Тем самым устанавливается аналогия между течением жидкости или газа в трубах и распределением электрического тока вдоль кабеля.

Background

The classic work of N.E. Zhukovsky on hydraulic shock in water pipes was the beginning of a large Number of studies on pressure unsteady fluid movement. The large scale of construction of a network of high-pressure oil and gas pipelines was the impetus for setting the problems of unsteady traffic. In these tasks, you have to take into account the viscosity and compressibility of the liquid, as well as hydraulic resistance.

Aims and Objectives

In this paper, which is mainly intended for practical purposes, we consider the problem of the fluid pressure field in round pipes under the linearized law of friction.

Results

It is shown how a system of equations can be transformed into a single hyperbolic equation with respect to pressure, mass velocity, or velocity for a drop of liquid. The resulting equation is a special case of the well-known Telegraph equation. This establishes an analogy between the flow of liquid or gas in pipes and the distribution of electric current along the cable.

В качестве конкретной задачи в работе получено решение уравнения, описывающего давление при граничных условиях 1-го рода, т.е. заданы давления на границах рассматриваемого участка трубопровода. С помощью стандартной подстановки неоднородные граничные условия сведены к однородным. Расчеты показали, что колебания давления по длине трубопровода происходят только в пусковом режиме. Этот период зависит от многих факторов, но главными являются коэффициент гидравлического сопротивления и скорость потока.

As a specific problem, the solution of the equation describing the pressure under boundary conditions of the 1st kind is obtained, i.e. the pressures at the boundaries of the pipeline section under consideration are set. Using standard substitution, inhomogeneous boundary conditions are reduced to homogeneous ones. Calculations have shown that pressure fluctuations along the length of the pipeline occur only in the start-up mode. This period depends on many factors, but the main ones are the coefficient of hydraulic resistance and the flow rate.

Ключевые слова: движение жидкости в трубах; гидравлическое сопротивление; линеаризация уравнения; уравнение гиперболического типа; метод разделения переменных; пусковой режим

Key words: fluid motion in pipes; hydraulic resistance; linearization of the equation; hyperbolic equation; method of separation of variables; starting mode

Первые работы, посвященные исследованию нестационарного движения жидкости в трубах, относятся к концу XIX века [1]. Основоположник данной теории Н.Е. Жуковский, своей работой о гидравлическом ударе в водопроводных трубах дал начало большому числу исследований по напорному неустановившемуся движению жидкости.

Исследования продолжаются и по сей день [2-4]. Бурное развитие нефтяной и газовой промышленности также требуют дальнейшего развития теории движения жидкости в трубах с учетом вязких свойств жидкости.

Фундаментальный вклад в решение этой проблемы внес русский учёный-механик, основоположник гидро- и аэродинамики Н.Е. Жуковский. Он показал, что в какой-либо заполненной жидкостью системе скачок давления, вызванный быстрым изменением скорости потока за малый промежуток времени, можно вычислить по формуле:

$$\Delta P = \rho (v_0 - v) \cdot c ,$$

где ΔP - изменение давления (Н/м^2);

ρ - плотность жидкости (кг/м^3);

$(v_0 - v)$ - изменение скорости до и после закрытия задвижки (м/с);

c - скорость распространения ударной волны в данной среде (скорость звука, м/с).

При этом скорость распространения ударной волны находится в прямо пропорциональной зависимости от сжимаемости жидкости, от величины деформации стенок трубопровода, а также от диаметра трубопровода.

Эти исследования показали, что гидроудар не может возникнуть в газопроводах, так как газ сжимаем.

Развитие нефтяной и газовой промышленности, строительство большого числа нефтегазопроводов поставило перед наукой задачи, решение которых требовало дальнейшего развития теории движения жидкости в трубах с учетом вязких свойств жидкости [5-7].

Дальнейшее развитие исследования Н.Е. Жуковского нашли в работах Л.С. Лейбензона и И.А. Чарного. В работах по неустановившемуся движению жидкости в трубах ими дана математическая постановка задачи, основанная на введении в уравнение осредненных членов, учитывающих гидравлическое сопротивление трубы.

В работе [8] И.А. Чарным получена система уравнений (1), являющаяся основной математической моделью для гидравлических расчетов трубопроводов круглого сечения при изотермическом режиме:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \dfrac{\lambda}{8\cdot\delta}\cdot\rho v^2, \\ -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial P}{\partial t} = \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial x}. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь ρ - плотность жидкости или газа,

P - среднее давление в сечении;

v - средняя в сечении скорость;

t - время;

x - направление потока;

λ - коэффициент сопротивления в формуле Дарси-Вейсбаха для потери напора на трение в трубе;

δ - гидравлический радиус (отношения поперечного сечения к смоченному периметру (для круглой трубы $\delta = \dfrac{d}{4}$, где d - диаметр трубы));

c - скорость звука в данной среде.

Слагаемое $\dfrac{\lambda}{8\cdot\delta}\cdot\rho v^2$ в системе (1) имеет квадрат скорости, и, следовательно, уравнение будет нелинейным.

Аналитическое решение и получение расчетных формул в этом случае затруднительно. По этой причине в гидравлических расчетах трубопроводов пользуются линеаризованным уравнением. Методов линеаризации несколько.

Одним из методов является замена выражения $\dfrac{\lambda v}{8\delta}$ его средним значением, т.е. можно допустить замену:

$$\frac{\lambda v}{8\delta} \approx \left(\frac{\lambda v}{8\delta}\right)_{\text{ср}} = 2a\,. \qquad (2)$$

Таким образом, вместо системы (1) получаем линеаризованную систему для функций $Q = \rho v$ и P - массовой скорости и давления:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial t} + 2a\cdot\rho v, \\ -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial P}{\partial t} = \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial x}. \end{cases} \qquad (3)$$

Для капельной жидкости ($\rho = const$) система (3) принимает вид:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial P}{\partial x} = \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial t} + 2av\right), \\ -\dfrac{\partial P}{\partial t} = c^2\rho\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \qquad (4)$$

Системы (3) и (4) могут быть сведены к одному уравнению как относительно давления (P), массовой скорости ($Q = \rho\cdot v$) или скорости (v).

Покажем это на системе (3).

Продифференцируем первое уравнение по x, а второе - по t, тогда получим:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial t\cdot\partial x} + 2a\cdot\dfrac{\partial Q}{\partial x}, \\ -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x\cdot\partial t}. \end{cases}$$

Согласно известной теореме о равенстве смешанных производных в области непрерывности $\frac{\partial^2 Q}{\partial t \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \cdot \partial t}$, получим:

$$-\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - 2a \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$

или

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{2a}{c^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial t}. \qquad (5)$$

Для капельной жидкости систему (4) также можно представить в виде уравнения:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{2a}{c^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}. \qquad (6)$$

Уравнения (5) и (6) являются уравнениями гиперболического типа. Вторые производные по времени показывают на инерционные свойства среды.

Слагаемые $\frac{2a}{c^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$ и $\frac{2a}{c^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial t}$ связаны с трением жидкости о стенки трубы и являются причиной затухания амплитуды колебания.

Ниже показано решение уравнения (5) при граничных условиях первого рода.

При соответствующем выборе параметров ρ, c, λ оно описывает давление в круглом трубопроводе газа или капельной жидкости.

Граничные условия:

$$P_{x=0} = P_н, \; P_{x=L} = P_к \left(P_н, P_к = const\right). \qquad (7)$$

$$P_{t=0} = P_0, \; \left.\frac{\partial P}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \qquad (8)$$

1. *Уравнение (5) линейное и однородное, но граничные условия (7) неоднородные.*

Приведем граничные условия к однородному виду с помощью подстановки:

$$P(x,t) = P_н + \frac{P_к - P_н}{L}x + z(x,t). \qquad (9)$$

После подстановки (9) в уравнение (5) и в краевые условия (7) и (8), получим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{2a}{c^2}\frac{\partial z}{\partial t}, \qquad (10)$$

при граничных условиях

$$z_{x=0} = z_{x=L} = 0. \qquad (11)$$

Начальные условия будут иметь вид:

$$z_{t=0} = P_0 - \left(P_н + \frac{P_к - P_н}{L}x\right) = f(x),$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \qquad (12)$$

2. *Полученное уравнение (10) однородное, граничные условия тоже однородны.*

Можно применить метод разделения переменных [9, 10]:

$$z(x,t) = X(x) \cdot T(t). \qquad (13)$$

После подстановки (13) в уравнение (10) и разделения переменных, получим уравнение:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} + \frac{2a}{c^2}\frac{T'}{T} = -\lambda^2$$

или систему

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ T'' + 2aT' + c^2\lambda^2 T = 0. \end{cases} \qquad (14)$$

Решением первого уравнения системы (14) при условиях $x(0) = x(L) = 0$ будет функция:

$$X = A \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \tag{15}$$

Собственные числа задачи $\lambda = \frac{n\pi}{L}$.

Для второго уравнения системы (14) характеристическое уравнение:

$$r^2 + 2ar + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 = 0.$$

$$r_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2} = -a \pm i \cdot \sqrt{\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 - a^2}.$$

Дискриминант для практически интересных случаев всегда отрицателен.

С точки зрения физики процесса положительный дискриминант означал бы, что в решении появится экспонента с положительным показателем. Это, в свою очередь, означает экспоненциальный рост давления при увеличении времени, что физически невозможно.

Таким образом, получаем решение второго уравнения системы (14):

$$T_n(t) = e^{-at} \cdot \left(D_1 \cos(\beta_n t) + D_2 \sin(\beta_n t)\right), \tag{16}$$

где $\beta_n = \sqrt{\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 - a^2}$.

Частное решение уравнения (10) согласно (13) будет иметь вид:

$$z(x,t) = e^{-at} \cdot \left(D_1 \cos(\beta_n t) + D_2 \sin(\beta_n t)\right) \cdot A \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot$$

В виду того, что уравнение (10) линейное и однородное, то получим:

$$z(x,t) = e^{-at} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\beta_n t) + b_n \sin(\beta_n t)\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \tag{17}$$

где $a_n = D_1 \cdot A$ и $b_n = D_2 \cdot A$.

Остается определить a_n и b_n.

Для этого воспользуемся начальными условиями (12).

1. $z_{t=0} = f(x)$.

При $t = 0$ получим, что

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Согласно теории рядов Фурье:

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^L \left(P_0 - \left(P_н + \frac{P_к - P_н}{L}x\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx =$$

$$= \frac{2}{n\pi} \cdot \left((P_0 - P_н) - (P_0 - P_к) \cdot (-1)^n\right).$$

2. $\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$.

Найдем производную:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -ae^{-at} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\beta_n t) + b_n \sin(\beta_n t)\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) +$$
$$+ e^{-at} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(-a_n \cdot \beta_n \sin(\beta_n t) + b_n \cdot \beta_n \cos(\beta_n t)\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

При $t = 0$ получим:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=0} = -a \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (a_n) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cdot \beta_n) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \cdot \beta_n - a \cdot a_n\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = 0,$$

откуда $b_n \cdot \beta_n - a \cdot a_n = 0$.

3. Для определения коэффициентов получена система:

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{n\pi} \cdot \left((P_0 - P_н) - (P_0 - P_к) \cdot (-1)^n\right), \\ b_n \cdot \beta_n - a \cdot a_n = 0. \end{cases}$$

Выразим из системы

$$\beta_n = \frac{a \cdot a_n}{\beta_n} = \frac{2a}{n\pi\beta_n} \cdot \left(P_0 - P_н - (P_0 - P_к) \cdot (-1)^n\right).$$

Таким образом, функцию $z(x,t)$ определили следующим образом:

$$z(x,t) = \frac{2}{n\pi} e^{-at} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg(\left((P_0 - P_н) - (P_0 - P_к) \cdot (-1)^n\right) \cos(\beta_n t) +$$
$$+ \frac{a\left((P_0 - P_н) - (P_0 - P_к) \cdot (-1)^n\right)}{\beta_n} \cdot \sin(\beta_n t)\Bigg) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right). \qquad (18)$$

Получили решение задачи (1)-(3):

$$P(x,t) = P_н + \frac{P_к - P_н}{L} x + \frac{2}{\pi} e^{-at} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg(\frac{\left((P_0 - P_н) - (P_0 - P_к) \cdot (-1)^n\right)}{n} \cos(\beta_n t) +$$
$$+ \frac{a\left((P_0 - P_н) - (P_0 - P_к) \cdot (-1)^n\right)}{n \cdot \beta_n} \cdot \sin(\beta_n t)\Bigg) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right). \qquad (19)$$

Слагаемое $\frac{2a}{c^2}\frac{\partial P}{\partial t}$, как было указано выше, связано с трением жидкости о стенки трубы и является причиной затухания амплитуды колебаний. На это указывает множитель e^{-at} в формуле (19). Расчеты показывают, что колебания давления по длине трубопровода происходят только в пусковом режиме насосных или компрессорных станций.

Для примера рассмотрено движение в нефтепроводе при следующих параметрах:

$P_н = 6\,\text{МПа}$, $P_к = P_0 = 3\,\text{МПа}$,

$c = 1315\,\text{м/с}$, $\lambda = 0{,}04$, $d = 0{,}72\,\text{м}$,

$v = 2{,}5\,\text{м/с}$, $L = 5\cdot 10^4$ м.

Давление выходит на стационарный режим через 60 с после начала процесса. Через 1 мин расчеты давления можно выполнять по стационарной части формулы (19).

Выводы

1. Линеаризация квадратичного закона трения позволяет математическую модель для гидравлических расчетов трубопроводов круглого сечения при изотермическом режиме представить в форме уравнения с частными производными гиперболического типа.

2. При граничных условиях первого рода полученное уравнение решено относительно давления классическим методом Фурье.

3. Расчеты показывают, что волновой характер течения наблюдается в начале процесса (при малых *t*), а со временем быстро ослабевает.

Список литературы

1. Жуковский Н.Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. М.: ГИТТЛ, 1949. 104 с.
2. Борзенко Е.И., Рыльцева К.Е., Шрагер Г.Р. Численное исследование характеристик течения неньютоновской жидкости в трубе с внезапным сужением // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 58. С. 56-70. DOI: 10.17223/19988621/58/5.
3. Мельникова В.Г. Тестирование различных методов моделирования внутренних течений несжимаемой жидкости // Труды Института системного программирования РАН. 2018. Т. 30. № 6. С. 315-328. DOI: 10.15514/ISPRAS-2018-30(6)-18.
4. Боздакбаев С.В., Жакебаев Д.Б. Математическое моделирование динамики трубопровода в транспортируемой жидкости под действием давления // Вестник Казахской академии транспорта и коммуникаций им. М. Танышпаева. 2017. № 1 (100). С. 223-228.
5. Гусейнзаде М.А., Юфин В.А. Неустановившееся движение нефти и газа в магистральных трубопроводах. М.: Недра, 1981. 232 с.
6. Изюмченко Д.В., Николаев О.В., Шулепин С.А. Газожидкостные потоки в вертикальных трубах: парадоксы гидродинамики // Научно-технический сборник «Вести газовой науки». 2013. № 4 (15). С. 36-45.
7. Жолобов В.В., Тарновскии Е.И. Моделирование неустановившихся течений углеводородных смесей в трубопроводах // Вестник Томского государственного педагогического университета. 2002. № 2 (30). С. 32-39.
8. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: Недра, 1975.

References

1. Zhukovskii N.E. *O gidravlicheskom udare v vodoprovodnykh trubakh* [About Water Hammer in Water Pipes]. Moscow, GITTL Publ., 1949. 104 p. [in Russian].
2. Borzenko E.I., Ryltseva K.E., Shrager G.R. Chislennoe issledovanie kharakteristik techeniya nen'yutonovskoi zhidkosti v trube s vnezapnym suzheniem [Numerical Investigation of Non-Newtonian Fluid Flow Through a Pipe Sudden Contraction]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal Of Mathematics And Mechanics*, 2019, No. 58, pp. 56-70. DOI: 10.17223/19988621/58/5. [in Russian].
3. Melnikova V.G. Testirovanie razlichnykh metodov modelirovaniya vnutrennikh techenii neszhimaemoi zhidkosti [Testing Different Numerical Methods Opportunities for Internal Flows Simulation]. *Trudy Instituta sistemnogo programmirovaniya RAN – Proceedings of the Institute for System Programming of the RAS*, 2018, Vol. 30, No. 6, pp. 315-328. DOI: 10.15514/ISPRAS-2018-30(6)-18. [in Russian].
4. Bozdakbaev S.V., Zhakebaev D.B. Matematicheskoe modelirovanie dinamiki truboprovoda v transportiruemoi zhidkosti pod deistviem davleniya [Mathematical Modeling of the Pipeline Dynamics in the Transported Fluid by the Pressure]. *Vestnik Kazakhskoi akademii transporta i kommunikatsii im. M. Tanyshpaeva – The Bulletin of Kazakh Academy of Transport and Communications named after M. Tynyshpaev*, 2017, No. 1 (100), pp. 223-228. [in Russian].
5. Guseinzade M.A., Yufin V.A. *Neustanovivsheesya dvizhenie nefti i gaza v magistral'nykh*

296 с.
9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004. 798 с.
10. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. М.: Мир, 1985. 383 с.

truboprovodakh [Unsteady Movement of Oil and Gas in Main Pipelines]. Moscow, Nedra Publ., 1981. 232 p. [in Russian].
6. Izyumchenko D.V., Nikolaev O.V., Shulepin S.A. Gazozhidkostnye potoki v vertikal'nykh trubakh: paradoksy gidrodinamiki [Gas-Liquid Flows in Vertical Pipes: Paradoxes of Hydrodynamics]. *Nauchno-tekhnicheskii sbornik «Vesti gazovoi nauki» - Scientific-Technical Collection Book «Vesti Gazovoy Nauki»*, 2013, No. 4 (15), pp. 36-45. [in Russian].
7. Zholobov B.B., Tarnovskii E.I. Modelirovanie neustanovivshikhsya techenii uglevodorodnykh smesei v truboprovodakh [Modeling Unsteady Flows of Hydrocarbon Mixtures in Pipelines]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta - Tomsk State Pedagogical University Bulletin*, 2002, No. 2 (30), pp. 32-39. [in Russian].
8. Charnyi I.A. *Neustanovivsheesya dvizhenie real'noi zhidkosti v trubakh* [Unsteady Motion of Real Liquid in Pipes]. Moscow, Nedra Publ., 1975. 296 p. [in Russian].
9. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 2004. 798 p. [in Russian].
10. Farlou S. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Partial Differential Equations for Scientists and Engineers]. Moscow, Mir Publ., 1985. 383 p. [in Russian].

Авторы

• Чупров Илья Федорович, д-р техн. наук, доцент
Ухтинский государственный технический университет
Профессор кафедры высшей математики
Российская Федерация, 169300, г. Ухта, ул. Первомайская, 13
e-mail: ichuprov@ugtu.net

• Пармузина Мария Семеновна, канд. пед. наук
Ухтинский государственный технический университет
Доцент кафедры высшей математики
Российская Федерация, 169300, г. Ухта, ул. Первомайская, 13
e-mail: mhozyainova@ugtu.net

The Authors

• Chuprov Ilia F., Doctor of Engineering Science, Associate Professor
Ukhta State Technical University
Professor of Higher Mathematics Department
13, Pervomayskaya str.,Ukhta, 169300, Russian Federation
e-mail: ichuprov@ugtu.net

• Parmuzina Maria S., Candidate of Pedagogical Sciences
Ukhta State Technical University
Assistant Professor of Higher Mathematics Department
13, Pervomayskaya str.,Ukhta, 169300, Russian Federation
e-mail: mhozyainova@ugtu.net